

Универсальный коллокационный метод для уравнений с запаздыванием и опережением

Приложение к моделированию лунной орбиты

Самулевич С. А.

СПбГЭТУ "ЛЭТИ"

2026

Определение

Уравнение с запаздыванием (DDE): скорость изменения в момент t зависит от состояния в прошлом $t - \tau$:

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau)), \quad \tau > 0.$$

- Для корректной постановки требуется задание начальной истории $\varphi(t)$, $t \in [t_0 - \tau, t_0]$.
- Задержек может быть несколько, и они могут зависеть от времени.

Уравнение движения с приливным запаздыванием

В упрощённом виде система Земля–Луна может быть описана уравнением

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = -\frac{(\mu + \mu_{\oplus})\mathbf{r}(t)}{r^3} - \frac{3k_2\mu}{r^3} \left(1 + \frac{\mu}{\mu_{\oplus}}\right) \left(\frac{a_e}{r}\right)^5 \mathbf{r}(t - \tau).$$

$\mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^2$ — радиус-вектор Луны относительно Земли;

$r = \|\mathbf{r}(t)\|$ — расстояние Земля–Луна;

$\mu, \mu_{\oplus}$ — гравитационные параметры Луны и Земли;

k_2 — приливная деформируемость Земли;

a_e — средний радиус Земли;

τ — время запаздывания приливного отклика.

Определение

Уравнение с опережением (ADE): скорость изменения в момент t зависит от состояния в будущем $t + \tau$:

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t + \tau)), \quad \tau > 0.$$

- Математически ставятся в основном в виде краевых задач.
- Встречается также смешанный тип (запаздывание + опережение).

Обращение систем с запаздыванием

Замена переменной времени

Рассмотрим уравнение с запаздыванием

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau)), \quad \tau > 0.$$

Введём новую переменную времени $s = T - t$ и новую функцию $y(s) = x(T - s)$.
После подстановки получаем

$$y'(s) = -f(T - s, y(s), y(s + \tau)),$$

то есть уравнение с опережением.

Процесс эквивалентен восстановлению прошлого по настоящему.

Известные численные подходы

- ❶ Методы истории (для DDE). Используется уже построенное решение для вычисления $x(t - \tau)$ при условии заданной начальной истории $\varphi(t)$.
 - + Высокая вычислительная эффективность для задач с запаздыванием.
 - Неприменимость к задачам с опережением.
- ❷ Вложенное интегрирование. Итерационно решается последовательность вспомогательных задач Коши: $x'_{n+1}(t) = f(t, x_{n+1}(t), x_n(t \pm \tau))$.
 - + Сходимость итерационного процесса.
 - Существенные вычислительные затраты.
- ❸ Экстраполяция/интерполяция. Значения $x(t \pm \tau)$ оцениваются по значениям на текущем или предыдущих шагах.
 - + Низкая вычислительная стоимость.
 - Возможна существенная потеря точности.

Классическая модель

На каждом шаге $[t_0, t_0 + h]$ решение приближается многочленом $u(t)$, удовлетворяющим исходному уравнению в точках $t_i = t_0 + hc_i$, $i = 1, \dots, s$:

$$u'(t_i) = f(t_i, u(t_i)).$$

- Эффективны теоретически: имеют высокий порядок, устойчивы, симметричны, могут быть симплектическими.
- Эффективны практически: демонстрируют лучшее соотношение точность/быстродействие среди известных методов в задачах орбитальной динамики, позволяют делать большие шаги.

Идея обобщённого коллокационного метода

Из ранее указанных соображений было принято решение адаптировать именно коллокационные методы.

Расширенная модель

На каждом шаге $[t_0, t_0 + h]$ решение приближается многочленом $u(t)$, удовлетворяющим исходному уравнению в точках $t_i = t_0 + hc_i$, $i = 1, \dots, s$:

$$u'(t_i) = f(t_i, u(t_i), u(t_i \pm \tau)).$$

- На первом шаге используется вложенная схема.
- На последующих шагах используется экстраполяционная схема.

- Коллокационные узлы соответствуют корням многочленов Лобатто:

$$\frac{d^{s-2}}{dx^{s-2}} x^{s-1} (1-x)^{s-1} = 0.$$

- Для интерполяционного полинома используется многочлен в форме Ньютона:

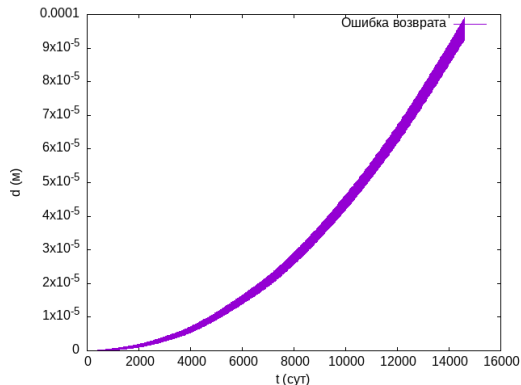
$$p(x) = \sum_{j=1}^s a_j \prod_{k=1}^{j-1} (x - c_j).$$

- Для решения возникающих неявных уравнений используется метод Зейделя. Начальное приближение — экстраполяция с прошлого шага.
- Первая точка нового интервала совпадает с последней точкой старого (FSAL).

Численные эксперименты

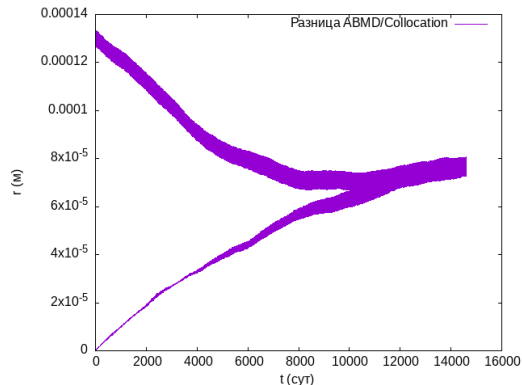
- Тест: плоская модель движения Луны с приливным запаздыванием.
- Интегрирование на 40 лет вперёд, после чего назад во времени.
- Метрика: разность с ABMD и число вычислений правой части.
- Дополнительная метрика точности: ошибка возврата между прямым и обратным интегрированием.

Результаты



Разность между прямым и обратным интегрированием

($s = 11$, $h = 5/2$, $N_{\text{iter}} = 2$).



Разность между коллокационным методом и ABMD

($s = 11$, $h = 5/2$, $N_{\text{iter}} = 2$, $\text{order} = 11$,

$\text{order}_{\text{ext}} = 4$, $h = 1/8$).

Метод	Вызовы правой части	Качество решения
Коллокационный	116861	Сравнимо с ABMD
ABMD	243953	"Удовлетворительное"

Наблюдение: коллокационный метод даёт сопоставимую точность при существенно более крупном шаге интегрирования и меньших затратах.

- Построен единый коллокационный подход для DDE и ADE.
- Метод применим к уравнениям первого и второго порядков.
- На задаче лунной орбиты показано преимущество по быстродействию при сохранении точности.

Перспективы: тестирование на современной лунной модели, анализ устойчивости, оценки порядка, адаптивный шаг.